

في الحلقة المولدة دائماً لازم يكون فيها \emptyset

4 م

(ع)

مترين: لتكون المجموعة

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

ولكنها ليست

$$H_1 = \{\{1\}\} \subset 2^X, H_2 = \{\{1\}, \{2\}\} \subset 2^X$$

المطلوب: (1) هل H_1 و H_2 حلقة أو غير حلقة على X ؟

(2) ماهي الحلقة وهي الحلقة المولدة لكل منها ؟

(3) ماهو الجبر σ ، الجبر وصفه وتبين المولد بالوصف ؟

$$H_1 = \{\{1\}\}$$

H_1 كل حلقة على X لأن $H_1 \neq \emptyset$

وبالتالي فإن H_1 كل حلقة على X هي حلقة.

كذلك فإن H_2 كل حلقة على X هي حلقة.

(2) الحلقة المولدة وهي الحلقة المولدة:

$$R(H_1) = \{\emptyset, \{1\}\} = R\sigma(H_1)$$

$$R(H_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} = R\sigma(H_2)$$

(3) الجبر المولد σ - الجبر المولد:

$$A(H_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\} = \mathcal{F}_\sigma(H_1)$$

$$A(H_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 4\}, X\}$$

$$, X\} = \mathcal{F}_\sigma(H_2)$$

صفه وتبين المولد:

$$D(H_1) = \mathcal{F}_\sigma(H_1) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, X\}$$

$$D(H_2) = \mathcal{F}_\sigma(H_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{3, 4\}, X\}$$

مترين (2) استنتج ان صير بوريل \mathcal{B}_R يمكن توليده لكل من الصفوف التالية:

$$I_1 = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$I_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$I_3 = \{]a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$I_4 = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

$$I_5 = \{]a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$$

$$I_6 = \{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$$

ای ای جوا کا ۱۰۰۰۰

$$I7. \{]-\infty, b[, b \in \mathbb{R} \}$$

$$I_8 = \{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R} \}$$

(2) اهتمت انكل محبوة وصيدة الغنصر هي محبوة بورلية

" " " " " منتهية " " " "

كل فجوة عدودة

الكل نظامان حيز بوريل BIR هو - الحيز المولد الصف المجموعات مفتوحة في R .

$$B(R) = F_2(0)$$

(11) ما ان كل فـال مفتوح هو فـجوة مـتوصـة في \mathbb{R} فإن $[a, b]$ فـجوة بـوليـة أي أن

(I) $F_0(I_1)CBR$ نقطة $I_1 CBR$ نقطة $a, b [CBR$

وبما أن كل مجموعة مفتوحة E يكتب بشكل اجتماع عدد طيات مفتوحة $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

$$\underline{EI} \rightarrow \in F_0(I_1)$$

وبالتالي فإن (T_1, F_0) هي لذلك هي

$$\text{Bir} = \mathcal{F}_0(\mathcal{O}) \subset \mathcal{F}_0(I_1) \quad (\text{II})$$

$$BIR = F_5(I, II)$$

عن (I), (II) گران

منذ أصل الصف I_2 لدينا عالي:

$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right] \in \mathbb{R}$

وهذا يعني أن كل حال مغلف هو مجموعة بورلية وهذا يتم بكون I_2CBR وبالتالي

III $F_5(I_2)CBR$ لنسب المجال المفتوح سجل اجتماع

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \in \mathcal{F}_\sigma(I_2)$$

$$\in I_2 \rightarrow \in F_5(I_2)$$

وَمِنْ ذَلِكَ يُشْعَرُ أَنْ $I_1 \subset F_5(I_2)$

(IV) $BIR = F_G(T_1) \subset F_G(T_2)$ التالي.

$$\text{Bir} = f_{\sigma}(I_2)$$

عن (III) و (IV) يتبع

مذاجل الصف I_3 لدينا عالي

$$]a, b[= \bigcap_{n=1}^{\infty}]a, b + \frac{1}{n}[$$

$$\in I_1 \Rightarrow]a, b + \frac{1}{n}[\in F_5(I_1) = BIR$$

أي أن كل مجال نصف مفتوح $]a, b[$ هو مجموعة بوريلية وبالتالي يكون $BIR \subset I_3$

وبالتالي $(V) F_5(I_3) \subset BIR$

لكن $]a, b[\in I_1$ ، لنكتب

$$]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty}]a, b - \frac{1}{n}[\in F_5(I_3)$$

$$\in F_5(I_3) \leftarrow \in I_3$$

لذلك يكون $I_1 \subset F_5(I_3)$

وبالتالي $(VI) BIR = F_5(I_1) \subset F_5(I_3)$

فمن (V) و (VI) نجد أن

$$BIR = F_5(I_3)$$

وبكل مشابه نثبت أن

$$BIR = F_5(I_4) = F_5(I_5) = F_5(I_6) = F_5(I_7) = F_5(I_8) = \dots$$

(2) من الطلب الأول فإن كل من المجالات

$$]a, b[, [a, b[,]a, b], [a, b]$$

هي مجموعة بوريلية

لكن $A = \{a\}$ مجموعة وصية المنصر عند a يمكن أن نكتب

$$\{a\} = \{a, b\} \setminus]a, b[\in BIR$$

$$\in BIR \quad \in BIR$$

أي أن كل مجموعة وصية المنصر هي مجموعة بوريلية

لنكن $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعة منتهية عند x_i :

$$B \subset \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\} \in BIR$$

$$\in BIR \quad \in BIR \quad \in BIR$$

الآن لنكن $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ مجموعة لا نهائية عند x_i :

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\} \in BIR$$

$$\in BIR$$

$$IR = \bigcup_{n=1}^{\infty}]-n, n[\in BIR$$

$$\in BIR$$

إضافة لذلك فإن IR مجموعة بوريلية لأن

$$\emptyset \in BIR$$